n° d'ordre 2142

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR 3e CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUE

par Pascal FANTODJI

Sujet de la Thèse : UN "THEOREME DE DENSITE LOCALE" POUR UNE CLASSE DE FONCTIONS ARITHMETIQUES DE DEUX ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS.

Soutenue le 2 juillet 1976 devant la commission d'examen

MM. H. DELANGE
Y. MEYER
J.L. NICOLAS

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548109_0021

T H E S E

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR 3^e CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUE

par Pascal FANTODJI

Sujet de la Thèse : UN "THEOREME DE DENSITE LOCALE" POUR UNE CLASSE DE FONCTIONS ARITHMETIQUES DE DEUX ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS.

Soutenue le 2 juillet 1976 devant la commission d'examen

MM. H. DELANGE
Y. MEYER
J.L. NICOLAS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A mes parents et à mes Amis.

Mes remerciements à M. Nicolas et à M. Meyer pour avoir accepté d'être membres du Jury pour la soutenance de ma thèse.

Mes remerciements et ma reconnaissance à M. Delange pour ses patients conseils.

INTRODUCTION

On appelle fonction arithmétique d'une variable toute fonction définie dans $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une telle fonction f est dite de classe $\mathcal{R}^1$ si et seulement si $\forall n,\ n\in\mathbb{N}^*$, $f(n) = f(q_n)$ où

$$q_n = \prod_{\substack{p^\alpha // n \\ \alpha > 1}} p^\alpha ,$$

la lettre p désignant un nombre premier, comme ce sera le cas dans toute la suite.

Pour une telle fonction f, Faĭnleĭb établit un théorème "de densité locale avec reste" sous la forme :

THEOREME 1 [1]. Soit f une fonction arithmétique de classe $\mathcal{R}_1$, $E \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors, pour N infini, on a :

$$\sum_{\substack{n\le N \\ f(n)\in E}} 1 = \lambda_E(f)\, N + O(\sqrt{N})$$

avec

$$\lambda_E(f) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ q_n = n \\ f(n)\in E}}^{\infty} \frac{1}{n \prod_{p/n} \left(1+\frac{1}{p}\right)} .$$

En fait, il existe une constante absolue positive c telle que $\forall x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$,

$$\left| \sum_{\substack{n \leq x \\ f(n) \in E}} 1 - \lambda_E(f)\, x \right| \leq c \sqrt{x}.$$

Remarquons que $\mathcal{R}_1$ contient toutes les fonctions additives égales à zéro sur les nombres premiers et toutes les fonctions multiplicatives égales à un sur les nombres premiers. Exemple : $f(n) = \Omega(n) - \omega(n)$ où $\omega(n)$ est le nombre des diviseurs premiers de n et $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers.

On se propose dans le présent travail d'examiner le cas des fonctions arithmétiques de deux variables. Il s'agira donc de déterminer une classe convenable de fonctions arithmétiques de deux entiers strictement positifs pour laquelle un analogue du théorème de Fainleib a lieu.

On donnera dans un premier paragraphe des préliminaires qui nous seront nécessaires sur les fonctions arithmétiques d'un ou de deux entiers strictement positifs. Dans un second paragraphe, on introduira les fonctions de classe $\mathcal{R}_2$; c'est-à-dire, des fonctions de deux entiers strictement positifs pour lesquelles un analogue du théorème de Fainleib a lieu. On énoncera ce théorème à la fin de ce paragraphe. Le troisième paragraphe sera consacré à la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 2.

I. PRELIMINAIRES.

I.1. Généralités sur les fonctions arithmétiques à deux variables.

I.1.1. Fonctions arithmétiques d'un ou de deux entiers strictement positifs.

L'ensemble des fonctions d'un entier strictement positif à valeurs réelles (ou complexes), noté $\mathscr{A}_1$, peut être considéré comme une algèbre sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies de manière classique. La multiplication de deux éléments de $\mathscr{A}_1$, que l'on nomme convolution est définie par :

$$(f * g)(n) = \sum_{d/n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right), \quad \text{ceci pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On peut munir, de la même manière, l'ensemble noté $\mathscr{A}_2$ des fonctions de deux entiers strictement positifs, à valeurs réelles (ou complexes) d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ; la multiplication de deux éléments, encore nommée convolution, étant cette fois définie par

$$(f * g)[m,n] = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f[d_1,d_2]\, g\left[\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right],$$

ceci pour tout couple $|m,n|$ appartenant à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

I.1.2.

Si f_1 et f_2 sont deux éléments de $\mathscr{A}_1$, on désigne par $f_1 \otimes f_2$ l'élément h de $\mathscr{A}_2$ défini par $h[m,n] = f_1(m)\, f_2(n)$, ceci pour tout couple $[m,n]$ appartenant à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

I.1.3.

$\mathscr{A}_1$ admet un élément unité pour la convolution. Il s'agit de la fonction arithmétique e_1 définie par :

$$e_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1, \\ 0 & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$

De même, $\mathscr{A}_2$ admet un élément unité pour la convolution ; il s'agit de l'élément e_2

défini par :

$$e_2[m,n] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad [m,n] = [1,1] \\ 0 & \text{si} \quad [m,n] \neq [1,1]. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que les éléments de $\mathcal{A}_1$ qui admettent un inverse pour la convolution sont les f_1 appartenant à $\mathcal{A}_1$ pour lesquels $f_1(1) \neq 0$.

De même, les éléments de $\mathcal{A}_2$ qui admettent un inverse pour la convolution sont les $f_2 \in \mathcal{A}_2$ pour lesquels $f_2[1,1] \neq 0$.

Dans $\mathcal{A}_1$ comme dans $\mathcal{A}_2$, on note f^{-*} l'inverse de f pour la convolution, si cet inverse existe.

Naturellement, l'ensemble des fonctions inversibles possède une structure de groupe pour la convolution.

I.1.4. On voit que $e_2 = e_1 \otimes e_1$.

De plus, pour tous f_1, f_2, g_1 et g_2 de $\mathcal{A}_1$, on a

$$(f_1 \otimes f_2) * (g_1 \otimes g_2) = (f_1 * g_1) \otimes (f_2 * g_2).$$

Par suite, si f et g sont deux éléments du groupe des éléments inversibles de $\mathcal{A}_1$ pour la convolution, $f \otimes g$ est un élément inversible de $\mathcal{A}_2$ et on a

$$(f \otimes g)^{-*} = f^{-*} \otimes g^{-*}.$$

I.2. Fonctions multiplicatives et fonctions additives.

I.2.1. La fonction f de $\mathcal{A}_1$ est dite multiplicative si l'on a $f(1) = 1$ et $f(nn') = f(n)f(n')$ lorsque $(n,n') = 1$. La deuxième condition entraîne la première si l'on suppose que la fonction f n'est pas identiquement nulle. La fonction f de $\mathcal{A}_1$ est

dite additive si l'on a $f(nn') = f(n) + f(n')$ lorsque $(n,n') = 1$, ce qui entraîne $f(1) = 0$.

On voit immédiatement qu'une fonction multiplicative, ou additive d'un entier strictement positif est complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour tous les entiers de la forme p^j où j est un entier positif.

Plus précisément, soit ρ_p la fonction de $\mathscr{A}_1$ définie par

$$\rho_p(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \nmid n \\ p^r & \text{si} \quad p^r/n \quad \text{et} \quad p^{r+1}/n, \quad r > 0. \end{cases}$$

Si f est multiplicative, on a

$$f(n) = \prod_{p/n} f(\rho_p(n)).$$

Si f est additive, on a

$$f(n) = \sum_{p/n} f(\rho_p(n)).$$

I.2.2. La fonction f de $\mathscr{A}_2$ est dite multiplicative si l'on a $f[1,1] = 1$ et $f[m'm'', n'n''] = f[m',n']f[m'',n'']$ lorsque $(m'n', m''n'') = 1$. (La condition $f[1,1] = 1$ est conséquence de la deuxième condition si l'on suppose que f n'est pas identiquement nulle.)

f est dite additive si l'on a $f[m'm'', n'n''] = f[m',n'] + f[m'',n'']$ lorsque $(m'n', m''n'') = 1$. (Ce qui entraîne $f[1,1] = 0$, comme on le voit en prenant $m' = m'' = n' = n'' = 1$).

On voit immédiatement qu'une fonction multiplicative ou additive de deux entiers positifs est complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour tous les couples $[p^j, p^k]$ où p est un nombre premier et j et k sont des entiers positifs ou nuls tels que $j + k > 0$. Plus précisément, si f est multiplicative, on a

$$f[m,n] = \prod_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)].$$

Si f est additive, on a

$$f[m,n] = \sum_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)].$$

Dans les deux cas, les valeurs de $f[p^j, p^k]$ peuvent etre arbitrairement choisies pour tous les nombres premiers p et tous les couples $[j,k]$ d'entiers positifs ou nuls tels que $j + k \geqslant 0$.

I.2.3 Désignons par $\mathcal{M}_1$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{A}_1$ qui sont multiplicatives et par $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{A}_2$ qui sont multiplicatives.

$\mathcal{M}_1$ est un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de $\mathcal{A}_1$ pour la convolution. $\mathcal{M}_2$ est un sous-groupe du groupe des éléments inversibles pour la convolution.

Application utile pour la suite.

Soit z l'élément de $\mathcal{A}_1$ défini par :

$$z(n) = 1 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On voit que $z \in \mathcal{M}_1$.

On note $z^{-*} = \mu$ (μ est la fonction de Möbius). z et μ sont des éléments de $\mathcal{M}_1$.

μ^2 est un élément de $\mathcal{M}_1$. $\mu^2 \otimes \mu^2 \in \mathcal{M}_2$.

Soit λ la fonction de $\mathcal{A}_1$ définie par :

$$\lambda(n) \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad n = 1 \\ (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k} = (-1)^{\Omega(n)} \quad \text{si} \quad n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_k^{\alpha_k}. \end{cases}$$

λ est la fonction de Liouville.

Ω est additive et λ multiplicative.

Par suite $\mu^2 * \lambda$ est multiplicative.

La valeur que prend $\mu^2 * \lambda$ pour $n = p^r$ où $r \geq 1$ est

$$\sum_{j=0}^{r} \mu^2(p^j)\,\lambda(p^{r-j}) = (-1)^r + (-1)^{r-1} = 0,$$

et $(\mu^2 * \lambda)(1) = 1$.

Donc $\mu^2 * \lambda = e_1$.

Ainsi, $(r^2 \otimes \mu^2)^{-*} = \lambda \otimes \lambda$

Signalons ici que $\lambda(nn') = \lambda(n)\lambda(n')$ même si $(n,n') > 1$. On dit que λ est complètement multiplicative.

I.3. Fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs.

I.3.1. On peut utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_1$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel des fonctions réelles (ou complexes) définies sur $[1\ ,\ +\infty[$, espace vectoriel qu'on désignera par X_1 :

$\underline{a}$ étant une fonction de $\mathscr{A}_1$ et F une fonction de X_1, on désigne par $a \perp F$, par exemple, la fonction G de X_1 définie par

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a(n)\, F\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut de même utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel X_2 des fonctions complexes de deux variables réelles ≥ 1.

$\underline{a}$ étant une fonction de $\mathscr{A}_2$ et F une fonction de X_2, on désigne par $a \perp F$ la fonction G de X_2 définie par

$$G(x,y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a[m,n]\, F\left(\frac{x}{m}\ ,\ \frac{y}{n}\right).$$

$\underline{a}$ étant fixée, l'application $F \mapsto a \perp F$ est une application linéaire de X_1 dans X_1 (ou de X_2 dans X_2).

On a les propriétés suivantes :

a) quelle que soit $F \in X_1$, $e_1 \perp F = F$;

quelle que soit $F \in X_2$, $e_2 \perp F = F$;

b) quels que soient $F \in X_1$, $a \in \mathcal{A}_1$, et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

quels que soient $F \in X_2$, $a \in \mathcal{A}_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

c) quelles que soient $F \in X_1$, a et $b \in \mathcal{A}_1$,

$$a \perp (b \perp F) = (a * b) \perp F ;$$

quelles que soient $F \in X_2$, a et $b \in \mathcal{A}_2$,

$$a \perp (b \perp F) = (a * b) \perp F.$$

I.3.2. Si l'on pose $Q(x) = \sum_{n \leq x} \mu^2(n)$, de sorte que $Q(x)$ est le nombre des entiers positifs "quadratfrei" au plus égaux à x, on a pour x infini

$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + 0\left[x^{1/2} e^{-\alpha \sqrt{\text{Log } x}}\right]$ où α est une constante positive.

Nous poserons $Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + x^{1/2} R(x)$.

Ainsi, il existe des constantes positives A et α telles que

$|R(x)| \leq A e^{-\alpha \sqrt{\text{Log } x}}$ pour tout $x \geq 1$.

I.4. Fonctions génératrices .

De façon analogue à ce que l'on fait pour les fonctions de $\mathcal{A}_1$, on définit les fonctions génératrices des éléments de $\mathcal{A}_2$ comme suit :

à la fonction f de $\mathcal{A}_2$, on associe la série double $\sum_{\substack{m \geq 1 \\ n \geq 1}} \frac{f[m,n]}{m^s n^{s'}}$ où s et s' sont deux variables complexes. S'il existe des valeurs de s et s' pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite "fonction génératrice" de f. Si les séries associées aux fonctions f et g de $\mathcal{A}_2$ sont

absolument convergentes pour $\mathrm{Re}\, s = \sigma$ et $\mathrm{Re}\, s' = \sigma'$, il en est de même de la série associée à $f * g$ est sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Avec cette définition, on a l'analogue à deux variables d'un théorème bien connu sur les fonctions multiplicatives à une variable, qui s'énonce :

THEOREME 2. *f étant une fonction multiplicative de deux entiers et σ et σ' deux nombres réels, si l'on a*

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k\geq 0 \\ j+k>0}} \frac{|f[p^j, p^k]|}{p^{j\sigma+k\sigma'}} < +\infty,$$

la série $\sum_{\substack{m\geq 1 \\ n\geq 1}} \frac{f|m,n|}{m^s n^{s'}}$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}\, s \geq \sigma$ et $\mathrm{Re}\, s' \geq \sigma'$ et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \Big[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f|p^j, p^k|}{p^{js+ks'}} \Big].$$

I.5. Distribution des valeurs d'une fonction arithmétique de deux entiers positifs [4].

I.5.1. Si A est une partie de $\mathbb{N}^* \mathbb{N}^*$, on désignera par $\nu_A(x,y)$ le nombre des couples $[m,n] \in A$ tels que $m \leq x$ et $n \leq y$.

I.5.2. On dit que A possède une densité δ si $(xy)^{-1}\nu_A(x,y)$ tend vers δ quand x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

On dit que A possède la densité au sens faible δ si $(xy)^{-1}\nu_A(x,y)$ tend toujours vers δ quand x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque.

I.5.3. f étant une fonction réelle (ou complexe) définie sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et A une partie finie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on peut se proposer d'étudier la distribution des valeurs prises par f sur A.

Pour chaque couple $[x,y]$ tel que $\nu_A[x,y] > 0$, soit $\mu_{x,y}$ la mesure sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie par $\mu_{x,y}(E) = (\nu_A[x,y])^{-1} X$ nombre des $[m,n] \in A$ tels que $m \leq x$, $n \leq y$ et $f(m,n) \in E$. On dira que f possède une distribution limite (resp. une distribution limite au sens faible) sur A si $\mu_{x,y}$ converge étroitement vers une mesure limite μ quand x et y tendent vers l'infini indépendamment l'un de l'autre (resp. de manière que les rapports $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{x}$ restent bornés).

Lorsque $\mu_{x,y}$ converge étroitement vers une mesure μ, on peut se proposer de majorer la quantité $|\mu_{x,y}(E) - \mu(E)|$.

II. FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{R}_2$.

II.1. Définitions, notations.

II.1.1. On définit les fonctions arithmétiques de deux entiers positifs q^1, q^2, α^1 et α^2 de la façon suivante :

$$q^1[m,n] = \prod_{\substack{p^\alpha // m \\ \alpha > 1 \text{ ou } p/n}} p^\alpha$$

$$q^2[m,n] = \prod_{\substack{p^\alpha // n \\ \alpha > 1 \text{ ou } p/m}} p^\alpha$$

$$\alpha^1[m,n] = \prod_{p // n \text{ et } p/n} p$$

$$\alpha^2[m,n] = \prod_{p // n \text{ et } p/m} p$$

(Il est entendu qu'un produit vide est pris égal à 1). Au lieu de $q^1[m,n]$, $q^2[m,n]$, $\alpha^1[m,n]$ et $\alpha^2[m,n]$, on écrira respectivement $q^1_{m,n}$, $q^2_{m,n}$, $\alpha^1_{m,n}$ et $\alpha^2_{m,n}$.

Quelques propriétés immédiates.

a) On vérifie aisément que les fonctions q^1, q^2, α^1 et α^2 sont multiplicatives.

b) On voit immédiatement que, si ψ est l'application de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ définie par $\psi[m,n] = [q^1_{m,n}, q^2_{m,n}]$, on a $\psi \circ \psi = \psi$, car

$$q^1_{q^1_{m,n}, q^2_{m,n}} = q^1_{m,n} \quad \text{et}$$

$$q^2_{q^1_{m,n}, q^2_{m,n}} = q^2_{m,n} .$$

c) Quel que soit $[m,n] \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a

$$m = q^1_{m,n}\, \alpha^1_{m,n} \quad \text{et} \quad n = q^2_{m,n}\, \alpha^2_{m,n} \ , \ \alpha^1_{m,n} \text{ et } \alpha^2_{m,n} \text{ quadratfrei,}$$

$$(q^1_{m,n}\, q^2_{m,n} \ , \ \alpha^1_{m,n}\, \alpha^2_{m,n}) = 1$$

$$\text{et} \quad (\alpha^1_{m,n} \ , \ \alpha^2_{m,n}) = 1 .$$

II.1.2. Proposition.

Pour qu'il existe m et n appartenant à $\mathbb{N}^*$ tels que $q^1_{m,n} = \ell_1$ et $q^2_{m,n} = \ell_2$, il faut que $q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1$ et $q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2$.

Quand cette condition est satisfaite, on a $q^1_{m,n} = \ell_1$ et $q^2_{m,n} = \ell_2$ si et seulement si $m = \ell_1 k_1$ et $n = \ell_2 k_2$, avec k_1 et k_2 quadratfrei, $(\ell_1 \ell_2 \ , \ k_1 k_2) = 1$ et $(k_1, k_2) = 1$.

Démonstration

Pour qu'il existe m et n appartenant à N^* tels que

$q^1_{m,n} = \ell_1$ et $q^2_{m,n} = \ell_2$, il est nécessaire que $q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1$ et $q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2$ d'après la propriété b) ci-dessus.

Supposons donc $q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1$ et $q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2$. On voit d'abord que si $m = \ell_1 k_1$ et $n = \ell_2 k_2$ avec k_1 et k_2 quadratfrei, $(\ell_1\ell_2 , k_1k_2) = 1$ et $(k_1,k_2) = 1$;

On a $q^1_{m,n} = \ell_1$ et $q^2_{m,n} = \ell_2$.

En effet, supposons que $P^\alpha \,/\!/\, \ell_1$. Cela entraîne que $P \times k_1$.

Comme $m = k_1\ell_1$, nécessairement $P^\alpha \,/\!/\, m$.

Alors, si $\alpha > 1$, $P^\alpha \,/\!/\, q^1_{m,n}$;

si $\alpha = 1$, comme $q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1$, p/ℓ_2 ;

donc p/n et par suite $p \,/\!/\, q^1_{m,n}$.

Ainsi $p^\alpha \,/\!/\, \ell_1$ entraîne $p^\alpha \,/\!/\, q^1_{m,n}$.

Supposons maintenant que $p^\alpha \,/\!/\, q^1_{m,n}$. Ceci entraîne $p^\alpha \,/\!/ m$. C'est-à-dire $p^\alpha \,/\!/\, k_1\ell_1$.

Alors, si $\alpha > 1$, comme $(k_1 , \ell_1) = 1$ et k_1 quadratfrei, on a $p^\alpha \,/\!/\, \ell_1$.

Si $\alpha = 1$, $P \,/\!/\, q^1_{m,n}$, donc P/m et P/n c'est-à-dire $P/k_1\ell_1$ et $p/k_2\ell_2$, ou bien $P \,/\!/\ell_1$ ou bien $p/\!/k_1$.

Supposons que $p/\!/k_1$; dans ce cas on a $p/\!/m$ et $p/k_2\ell_2$ et on ne peut avoir p/k_2 , puisque $(k_1,k_2) = 1$; ceci exige que p/ℓ_2 . Mais, comme $(\ell_2,k_1) = 1$, on aboutit à une contradiction.

Finalement, $p^\alpha // q^1_{m,n}$ entraîne $p^\alpha // \ell_1$.

On a ainsi montré que $q^1_{m,n} = \ell_1$.

$q^2_{m,n} = \ell_2$ se démontre de manière analogue. Il nous reste à démontrer que si $q^1_{m,n} = \ell_1$ et $q^2_{m,n} = \ell_2$, on a $m = \ell_1 k_1$ et $n = \ell_2 k_2$, avec k_1 et k_2 quadratfrei, $(\ell_1 \ell_2 , k_1 k_2) = 1$ et $(k_1 , k_2) = 1$. En effet, comme $q^1_{m,n} = \ell_1$ et $q^2_{m,n} = \ell_2$, on a ℓ_1 / m et ℓ_2 / n et on peut écrire $m = \ell_1 k_1$ et $n = \ell_2 k_2$. Ceci exige d'après la propriété c) de II.1,1 que $k_1 = \alpha^1_{m,n}$, $k_2 = \alpha^2_{m,n}$, et par suite, k_1 et k_2 quadratfrei, $(\ell_1 \ell_2 , k_1 k_2) = 1$ et $(k_1 , k_2) = 1$.

II.2. Fonctions de classe $\mathcal{R}_2$.

Soit $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) .

Nous dirons que f est de classe $\mathcal{R}_2$ si et seulement si

$\forall\, [m,n] \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $f[m,n] = f[q^1_{m,n} , q^2_{m,n}]$.

Exemples.

1) $f[m,n] = \begin{cases} 1 & \text{si } (m,n) = 1 , \\ 0 & \text{si } (m,n) > 1 . \end{cases}$

En effet : si $(m,n) = 1$, $(q^1_{m,n} , q^2_{m,n}) = (q_m , q_n) = 1$

si $(m,n) > 1$, $(q^1_{m,n} , q^2_{m,n}) > 1$.

2) Si f et g appartiennent à $\mathcal{R}_1$, alors $f \otimes g$ appartient à $\mathcal{R}_2$.

En effet : $q_{\substack{1 \\ q_{m,n}}} = q_m$, $q_{\substack{2 \\ q_{m,n}}} = q_n$.

Donc, si f et g sont de classe $\mathcal{R}_1$, on a

$$f(q^1_{m,n})\, g(q^2_{m,n}) = f(q_{\substack{1 \\ q_{m,n}}})\, g(q_{\substack{2 \\ q_{m,n}}}) = f(q_m)\, g(q_n) = f(m)\, g(n) .$$

3) $\mathcal{R}_2$ contient toutes les fonctions additives égales à zéro sur tout couple de la forme $[1,p]$ ou $[p,1]$ ainsi que toutes les fonctions multiplicatives qui valent 1 sur ces mêmes couples.

Preuve .

Soit f une fonction additive de deux entiers positifs qui vaut zéro sur les couples $[1,p]$ et $[p,1]$ et soit $[m,n] \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

La représentation de $[m,n]$ au §II.1.1.,c permet d'écrire puisque f est additive :

$$f[m,n] = f[q^1_{m,n} , q^2_{m,n}] + f[\alpha^1_{m,n} , \alpha^2_{m,n}] \ ;$$

d'après I.2.2, on a

$$f[\alpha^1_{m,n} , \alpha^2_{m,n}] = \sum_{p/\alpha^1_{m,n}\ \alpha^2_{m,n}} f\ [\rho_p(\alpha^1_{m,n}) \ , \ \rho_p(\alpha^2_{m,n})]$$

$$= \sum_{p/\alpha^1_{m,n}} f(p,1) + \sum_{p/\alpha^2_{m,n}} f(1,p) = 0 .$$

On a donc $f[m,n] = f[q^1_{m,n} , q^2_{m,n}]$.

La preuve est analogue pour les fonctions multiplicatives

II.1,2. Le résultat auquel on va aboutir est le suivant :

Théorème 3.

Soit f une fonction arithmétique de deux entiers strictement positifs, de classe $\mathcal{R}_2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et soit $E \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On pose $$\mu_{x,y}(E) = \frac{1}{xy} \sum_{\substack{f(m,n) \in E \\ m \leqslant x \\ n \leqslant y}} 1 .$$

Alors, $\mu_{x,y}(E)$ tend vers une limite finie $\mu(\varepsilon)$ lorsque x et y tendent vers l'infini indépendamment l'un de l'autre.

De façon plus précise,

$\forall x \geqslant 1$, $\forall y \geqslant 1$, on a

$|\mu_{x,y}(E) - \mu(E)| \leqslant K(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}})$ où K est une constante absolue.

III. DEMONSTRATION DU THEOREME 3.

III. Remarque.

Il nous suffira d'établir le théorème suivant :

Théorème 4.

Soit f une fonction arithmétique de deux entiers positifs de classe $\mathcal{R}_2$ ne prenant que les valeurs zéro et un.

On pose $\mu_{x,y} = \frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leqslant x \\ n \leqslant y}} f[m,n]$.

Alors $\mu_{x,y}$ tend vers une limite finie μ lorsque x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre. De façon plus précise,

$$\forall x \geqslant 1 \quad , \forall y \geqslant 1 \quad , \quad |\mu_{x,y} - \mu| \leqslant K(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}})$$

où K est une constante absolue.

Preuve de la remarque.

Si $f \in \mathcal{R}_2$ et $E \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\chi_E \circ f \in \mathcal{R}_2$ (χ_E étant la fonction caractéristique de l'ensemble E) .

$\chi_E \circ f$ ne prend que les valeurs zéro et un

et $$\sum_{\substack{m \leqslant x \\ n \leqslant y}} (\chi_E \circ f)[m,n] = \sum_{\substack{m \leqslant x \\ n \leqslant y \\ f[m,n] \in E}} 1 = xy\, \mu_{x,y}$$

On démontrera le théorème 4 en plusieurs étapes.

III,2. Calcul de $\sum_{\substack{m \leqslant x \\ n \leqslant y}} f[m,n]$

on a $$\sum_{\substack{m \leqslant x \\ n \leqslant y}} f[m,n] = \sum_{\substack{m \leqslant x \\ n \leqslant y}} f[q^1_{m,n} , q^2_{m,n}] ,$$

en regroupant les couples $[m,n]$ pour lesquels $q^1_{m,n}$ et $q^2_{m,n}$ ont les mêmes valeurs, on a, d'après la proposition II,1.2,

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} f[m,n] = \sum_{\substack{\ell_1\leqslant x\\ \ell_2\leqslant y\\ q^1_{\ell_1,\ell_2}=\ell_1\\ q^2_{\ell_1,\ell_2}=\ell_2}} f[\ell_1,\ell_2] \sum_{\substack{k_1\leqslant \frac{x}{\ell_1}\\ k_2\leqslant \frac{y}{\ell_2}\\ (k_1k_2,\ \ell_1\ell_2)=1\\ (k_1,k_2)=1}} \mu^2(k_1)\,\mu^2(k_2)$$

$$= \sum_{\substack{\ell_1\leqslant x\\ \ell_2\leqslant y\\ q^1_{\ell_1,\ell_2}=\ell_1\\ q^2_{\ell_1,\ell_2}=\ell_2}} f[\ell_1,\ell_2] \sum_{\substack{k_1\leqslant \frac{x}{\ell_1}\\ k_2\leqslant \frac{y}{\ell_2}}} g_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2]$$

où

$$g_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2] = \begin{cases} \mu^2(k_1)\mu^2(k_2) & \text{si } (k_1k_2,\ \ell_1\ell_2)(k_1,k_2) = 1\ , \\ 0 & \text{si } (k_1k_2,\ \ell_1\ell_2)(k_1,k_2) > 1\ . \end{cases}$$

III.2.1.

La fonction g_{ℓ_1,ℓ_2} est multiplicative.

D'une part, $g_{\ell_1,\ell_2}(1,1) = 1$; d'autre part, soient

$k'_1\ ,\ k'_2\ ,\ k''_1\ ,\ k''_2$ satisfaisant à $(k'_1k'_2\ ,\ k''_1\ k''_2) = 1$

on a

$$g_{\ell_1,\ell_2}(k'_1k''_1\ ,\ k'_2\ k''_2) = \begin{cases} \mu^2(k'_1k''_1)\ \mu^2(k'_2k''_2) \\ \qquad \text{si } (k'_1k''_1k'_2k''_2\ ,\ \ell_1\ell_2)(k'_1k''_1\ ,\ k'_2k''_2) \\ \qquad\qquad = 1\ , \\ 0 \quad \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

$$g_{\ell_1,\ell_2}(k'_1,k'_2)g_{\ell_1,\ell_2}(k''_1,k''_2) = \begin{cases} \mu^2(k'_1)\ \mu^2(k'_2)\mu^2(k''_1)\ \mu^2(k''_2) \\ \quad \text{si}\ \ (k'_1k'_2,\ \ell_1\ell_2)(k'_1,k'_2) \\ \quad = (k''_1k''_2\ ,\ \ell_1\ell_2)(k''_1,k''_2)=1 \\ \quad 0\ \ \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

$(k'_1k'_2\ ,\ k''_1k''_2) = 1$ implique $(k'_1\ ,\ k''_1) = (k'_2\ ,\ k''_2) = 1$;

donc $\mu^2(k'_1k''_1)\ \mu^2(k'_2k''_2) = \mu^2(k'_1)\ \mu^2(k''_1)\ \mu^2(k'_2)\ \mu^2(k''_2)$.

D'autre part,

$(k'_1k''_1\ k'_2k''_2\ ,\ \ell_1\ell_2)\ (k'_1k''_1\ ,\ k'_2k''_2) = 1$ si et seulement si

$(k'_1k'_2\ ,\ \ell_1\ell_2)\ (k'_1,k'_2) = (k''_1k''_2\ ,\ \ell_1\ \ell_2)\ (k''_1\ ,\ k''_2) = 1$.

On a donc bien

$$g_{\ell_1,\ell_2}(k'_1\ k''_1\ .\ k'_2\ k''_2) = g_{\ell_1,\ell_2}(k'_1\ ,\ k'_2)g_{\ell_1,\ell_2}(k''_1\ ,k''_2)\ .$$

III,2,2.

Soit $\gamma_{\ell_1,\ell_2} * (\mu^2 \otimes \mu^2) = g_{\ell_1,\ell_2}$

on a d'après I,2,3

$$\gamma_{\ell_1,\ell_2} = g_{\ell_1,\ell_2} * (\lambda \otimes \lambda)\ .$$

Ainsi.

$$\sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} f[m,n] = \sum_{\substack{\ell_1\leq x\\ \ell_2\leq y\\ q^1_{\ell_1,\ell_2}=\ell_1\\ q^2_{\ell_1,\ell_2}=\ell_2}} f[\ell_1,\ell_2] \sum_{\substack{k_1\leq \frac{x}{\ell_1}\\ k_2\leq \frac{y}{\ell_2}}} (\gamma_{\ell_1\ell_2} * \mu^2\otimes\mu^2)[k_1,k_2]$$

$$= \sum_{\substack{\ell_1\leq x\\ \ell_2\leq y\\ q^1_{\ell_1,\ell_2}=\ell_1\\ q^2_{\ell_1,\ell_2}=\ell_2}} f[\ell_1,\ell_2] \sum_{\substack{k_1\leq \frac{x}{\ell_1}\\ k_2\leq \frac{y}{\ell_2}}} \gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2] \sum_{\substack{d_1\leq \frac{x}{k_1\ell_1}\\ d_2\leq \frac{y}{k_2\ell_2}}} \mu^2(d_1)\mu^2(d_2)$$

ceci d'après I.3,1, deuxième propriété du c) .

Donc,

$$\sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} f[m,n] = \sum_{\substack{\ell_1\leq x\\ \ell_2\leq y\\ q^1_{\ell_1,\ell_2}=\ell_1\\ q^2_{\ell_1,\ell_2}=\ell_2}} f[\ell_1,\ell_2] \left[\sum_{\substack{k_1\leq \frac{x}{\ell_1}\\ k_2\leq \frac{y}{\ell_2}}} \gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2] \left(\sum_{d_1\leq \frac{x}{k_1\ell_1}} \mu^2(d_1)\left(\sum_{d_2\leq \frac{y}{k_2\ell_2}} \mu^2(d_2)\right)\right)\right]$$

$$= \sum_{\substack{\ell_1\leq x\\ \ell_2\leq y\\ q^1_{\ell_1,\ell_2}=\ell_1\\ q^2_{\ell_1,\ell_2}=\ell_2}} f[\ell_1,\ell_2] \left[\sum_{\substack{k_1\leq \frac{x}{\ell_1}\\ k_2\leq \frac{y}{\ell_2}}} \gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2] \left(\frac{6}{\pi^2}\frac{x}{k_1\ell_1} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2}}\ell_1^{\frac{1}{2}}} R\left(\frac{x}{k_1\ell_1}\right)\right)\left(\frac{6}{\pi^2}\frac{y}{k_2\ell_2} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{k_2^{\frac{1}{2}}\ell_2^{\frac{1}{2}}} R\left(\frac{y}{k_2\ell_2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{36}{\Pi^4}\, xy \sum_{\substack{\ell_1 \leqslant x \\ \ell_2 \leqslant y \\ q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1 \\ q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2}} \frac{f[\ell_1,\ell_2]}{\ell_1 \ell_2} \sum_{k_1 \leqslant \frac{x}{\ell_1},\ k_2 \leqslant \frac{y}{\ell_2}} \frac{\gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2]}{k_1 k_2}$$

$$+ \frac{6}{\Pi^2}\, xy^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\ell_1 \leqslant x \\ \ell_2 \leqslant y \\ q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1 \\ q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2}} \frac{f[\ell_1,\ell_2]}{\ell_1 \ell_2^{\frac{1}{2}}} \sum_{k_1 \leqslant \frac{x}{\ell_1},\ k_2 \leqslant \frac{y}{\ell_2}} \frac{\gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2]}{k_1 k_2^{\frac{1}{2}}} R\left(\frac{y}{k_2 \ell_2}\right)$$

$$+ \frac{6}{\Pi^2}\, x^{\frac{1}{2}} y \sum_{\substack{\ell_1 \leqslant x \\ \ell_2 \leqslant y \\ q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1 \\ q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2}} \frac{f[\ell_1,\ell_2]}{\ell_1^{\frac{1}{2}} \ell_2} \sum_{k_1 \leqslant \frac{x}{\ell_1},\ k_2 \leqslant \frac{x}{\ell_2}} \frac{\gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2]}{k_1^{\frac{1}{2}} k_2} R\left(\frac{x}{k_1 \ell_1}\right)$$

$$+ x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\ell_1 \leqslant x \\ \ell_2 \leqslant y \\ q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1 \\ q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2}} \frac{f[\ell_1,\ell_2]}{\ell_1^{\frac{1}{2}} \ell_2^{\frac{1}{2}}} \sum_{k_1 \leqslant \frac{x}{\ell_1},\ k_2 \leqslant \frac{y}{\ell_2}} \frac{\gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2]}{k_1^{\frac{1}{2}} k_2^{\frac{1}{2}}} R\left(\frac{x}{k_1 \ell_1}\right) R\left(\frac{y}{k_2 \ell_2}\right)$$

III.2.3.

On pose $h(m,n) = \sum_{\substack{k_1 \ell_1 = m \\ k_2 \ell_2 = n \\ q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1 \\ q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2}} \gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2]\, f[\ell_1,\ell_2]$

$$\varphi(m,n) = \sum_{\substack{k_1 \ell_1 = m \\ k_2 \ell_2 = n \\ q^1_{\ell_1,\ell_2} = \ell_1 \\ q^2_{\ell_1,\ell_2} = \ell_2}} |\gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1,k_2]|$$

On voit d'une part que

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f[m,n] = \frac{36}{\Pi^4} xy \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{h(m,n)}{mn} + \frac{6}{\Pi^2} xy^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{h(m,n)}{m n^{\frac{1}{2}}} R\left(\frac{y}{n}\right)$$

$$+ \frac{6}{\Pi^2} x^{\frac{1}{2}} y \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{h(m,n)}{m^{\frac{1}{2}} n} R\left(\frac{x}{m}\right) + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{h(m,n)}{m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}} R\left(\frac{x}{m}\right) R\left(\frac{y}{m}\right) ,$$

et que

pour tout couple $[m,n]$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$$|h(m,n)| \leq \varphi[m,n] .$$

D'autre part, on va voir que la fonction arithmétique φ est multiplicative et déterminer ses valeurs pour les couples (p^r, p^s) où r et $s \geqslant 0$, $r + s > 0$.

Remarquons d'abord que la fonction arithmétique de quatre variables définie par :

$(\ell_1, \ell_2, k_1, k_2) \mapsto g_{\ell_1, \ell_2}[k_1, k_2]$ est multiplicative.

D'une part, $g_{1,1}[1,1] = 1$.

D'autre part, soient ℓ_1' , ℓ_1'' , ℓ_2' , ℓ_2'' , k_1', k_1'' , k_2' , k_2''

8 entiers positifs satisfaisant à :

$$(\ell_1' \ \ell_2' \ \ k_1' \ k_2' \ , \ \ \ell_1'' \ \ell_2'' \ k_1'' \ k_2'') = 1 \ ;$$

on a :

$$g_{\ell_1' \ell_1'', \ell_2' \ \ell_2''}[k_1' k_1'' \ ; \ k_2' k_2''] = \begin{cases} \mu^2(k_1' k_1'') \ \mu^2(k_2' k_2'') \\ \text{si} \\ (k_1' k_1'' \ k_2' k_2'' \ , \ \ell_1' \ \ell_1'' \ \ell_2' \ \ell_2'') \\ = (k_1' k_1'' \ , \ \ k_2' k_2'') = 1 \quad , \\ 0 \quad \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

$$g_{\ell_1' \ell_2'}[k_1' \ k_2'] \ g_{\ell_1'' \ell_2''}[k_1'' \ , \ k_2''] = \begin{cases} \mu^2(k_1') \ \mu^2(k_2') \ \mu^2(k_1'') \ \mu^2(k_2'') \\ \text{si} \quad (k_1' \ , \ k_2') = (k_1'' \ , \ k_2'') \\ = (k_1' k_2' \ , \ \ell_1' \ell_2') = (k_1'' \ k_2'', \ \ell_1'' \ \ell_2'') = 1 \quad , \\ 0 \quad \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Comme $(k_1' k_1'' k_2' k_2'' \ , \ \ell_1' \ell_1'' \ell_2' \ell_2'') = (k_1' k_1'' \ , \ k_2' k_2'') = 1$

si et seulement si

$$(k_1', k_2') = (k_1'', \ k_2'') = (k_1' k_2' \ , \ \ell_1' \ \ell_2') = (k_1'', \ k_2'', \ \ell_1'' \ , \ \ell_2'') = 1 \quad ,$$

et comme

$\mu^2(k'_1k''_1)\ \mu^2(k'_2k''_2) = \mu^2(k'_1)\ \mu^2(k'_2)\ \mu^2(k''_1)\ \mu^2(k''_2)$ l'une ou l'autre des deux conditions précédentes et remplie, on a bien

$$g_{\ell'_1\ell''_1,\ell'_2\ell''_2}\ (k'_1\ k''_1,\ k'_2k''_2) = g_{\ell'_1,\ell'_2}(k'_1\ ,\ k'_2)g_{\ell''_1,\ell''_2}\ (k''_1,k''_2)\ .$$

Remarquons également que la fonction arithmétique de quatre variables définies par

$(\ell_1,\ell_2\ ,\ k_1\ ,\ k_2) \mapsto \gamma_{\ell_1,\ell_2}[k_1\ ,k_2]$ est multiplicative.

D'une part, $\gamma_{1,1}[1,1] = 1$.

D'autre part, soient comme plus haut, ℓ'_1 , ℓ''_1 , ℓ'_2 , ℓ''_2 , k'_1 , k''_1 , k'_2 , k''_2 8 entiers positifs satisfaisant à

$$(\ell'_1\ell'_2k'_1k'_2\ ,\ \ell''_1\ell''_2k''_1k''_2) = 1\ .$$

On a :

$$\gamma_{\ell'_1\ell''_1,\ell'_2\ell''_2}\ [k'_1\ k''_1\ ,\ k'_2\ k''_2] = \sum_{\substack{d_1/k'_1k''_1\\ d_2/k'_2k''_2}} g_{\ell'_1\ell''_1,\ell'_2\ell''_2}(d_1,d_2)\lambda(\frac{k'_1k''_1}{d_1})\ \ \lambda(\frac{k'_2k''_2}{d_2})$$

Comme $(k'_1\ ,\ k''_1) = (k'_2\ ,\ k''_2) = 1$, on obtient tous les couples (d_1,d_2) où $d_1/k'_1k''_1$ et $d_2/k'_2k''_2$, chacun une fois, en associant à chaque système $(d'_1,d''_1,\ d'_2,\ d''_2)$ où d'_1/k'_1 , d''_1/k''_1 , d'_2/k'_2 , d''_2/k''_2 le couple $(d'_1d''_1,\ d'_2d''_2)$.

et on a chaque fois

$$(\frac{k'_1}{d'_1}\ ,\ \frac{k''_1}{d''_1}) = (\frac{k'_2}{d'_2}\ ,\ \frac{k''_2}{d''_2}\ ) = 1\ .$$

De plus, le fait que $(\ell_1' \ell_2' k_1' k_2' , \ell_1'' \ell_2'' k_1'' k_2'') = 1$ entraîne que l'on a toujours

$$(\ell_1' \ell_2' d_1' d_2' , \ell_1'' \ell_2'' d_1' d_2'') = 1 .$$

Par suite

$$\gamma_{\ell_1'\ell_1'', \ell_2'\ell_2''}(k_1'k_1'' , k_2'k_2'') =$$

$$\sum_{\substack{d_1'|k_1', d_1''/k_1'' \\ d_2'|k_2', d_2''/k_2''}} g_{\ell_1'\ell_1'', \ell_2'\ell_2''}(d_1' d_1'', d_2' d_2'') \lambda\left(\frac{k_1'k_1''}{d_1'd_1''}\right) \lambda\left(\frac{k_2'k_2''}{d_2'd_2''}\right)$$

$$= \sum_{\substack{d_1'/k_1', d_1''/k_1'' \\ d_2'/k_2', d_2''/k_2''}} g_{\ell_1', \ell_2'}(d_1', d_2') g_{\ell_1'', \ell_2''}(d_1'', d_2'') \lambda\left(\frac{k_1'}{d_1'}\right) \lambda\left(\frac{k_2'}{d_2'}\right) \lambda\left(\frac{k_1''}{d_1''}\right) \lambda\left(\frac{k_2''}{d_2''}\right)$$

$$= \sum_{\substack{d_1'/k_1' \\ d_2'/k_2'}} g_{\ell_1', \ell_2'}(d_1', d_2') \lambda\left(\frac{k_1'}{d_1'}\right) \lambda\left(\frac{k_2'}{d_2'}\right) \sum_{\substack{d_1''/k_1'' \\ d_2''/k_2''}} g_{\ell_1'', \ell_2''}(d_1'', d_2'') \lambda\left(\frac{k_1''}{d_1''}\right) \lambda\left(\frac{k_2''}{d_2''}\right)$$

$$= \gamma_{\ell_1', \ell_2'}(k_1' , k_2') \gamma_{\ell_1'', \ell_2''}(k_1'' , k_2'') .$$

C.Q.F.D.

On va prouver finalement que φ est multiplicative.

D'une part, on voit que $\varphi(1,1) = 1$.

D'autre part, soient m', m'', n', n'' quatre entiers positifs satisfaisant à $(m'n', m''n'') = 1$.

On a :

$$\varphi(m'm'', n'n'') = \sum_{\substack{k_1\ell_1=m'm'' \\ k_2\ell_2=n'n'' \\ q^1_{\ell_1,\ell_2}=\ell_1 \\ q^2_{\ell_1,\ell_2}=\ell_2}} |\gamma_{\ell_1,\ell_2}(k_1,k_2)| .$$

Comme $(m',m'') = (n',n'') = 1$, on voit que l'ensemble des systèmes d'entiers k_1 , ℓ_1 , k_2 , ℓ_2 satisfaisant à $k_1\ell_1 = m'm''$ et $k_2\ell_2 = n'n''$ est identique à l'ensemble des systèmes $(k'_1,k''_1 , \ell'_1,\ell''_2 , k'_2,k''_2, \ell'_2,\ell''_2)$ où $k'_1 \ell'_1 = m'$, $k'_2\ell'_2 = n'$, $k''_1\ell''_1 = m''$ et $k''_2\ell''_2 = n''$. De plus, du fait que $(m'n',m''n'') = 1$ et que les fonctions q^1 et q^2 sont multiplicatives, on a toujours

$$q^1_{\ell'_1\ell''_1, \ell'_2\ell''_2} = q^1_{\ell'_1, \ell'_2} \; q^1_{\ell''_1, \ell''_2}$$

et $$q^2_{\ell'_1\ell''_1, \ell'_2\ell''_2} = q^2_{\ell'_1\ell'_2} \; q^2_{\ell''_1, \ell''_2} \quad ;$$

et comme $$q^1_{\ell'_1, \ell'_2} \mid \ell'_1 \; , \; q^1_{\ell''_1\ell''_2} \mid \ell''_1 \; , \; q^2_{\ell'_1, \ell'_2} \mid \ell'_2, q^2_{\ell''_1, \ell''_2} \mid \ell''_2 \; ,$$

on voit que l'on a

$$q^1_{\ell'_1, \ell''_1, \ell'_2\ell''_2} = \ell'_1\ell''_1 \quad \text{et} \quad q^2_{\ell'_1\ell''_1, \ell'_2\ell''_2} = \ell'_2 \; \ell''_2$$

si et seulement si

$$q^1_{\ell'_1, \ell'_2} = \ell'_1 \; , \; q^1_{\ell''_1, \ell''_2} = \ell''_1 \; , \; q^2_{\ell'_1, \ell'_2} = \ell'_2 \; , \; q^2_{\ell''_1, \ell''_2} = \ell''_2 \; .$$

On voit ainsi que l'on a

$$\varphi(m'm'',n'n'') = \sum_{\substack{k'_1\ell'_1=m' \ , \ k''_1\ell''_1=m'' \\ k'_2\ell'_2=n' \ , \ k''_2\ell''_2=n'' \\ q^1_{\ell'_1,\ell'_2}=\ell'_1 \ , \ q^1_{\ell''_1,\ell''_2}=\ell''_1 \\ q^2_{\ell'_1,\ell'_2}=\ell'_2 \ , \ q^2_{\ell''_1,\ell''_2}=\ell''_2}} \left|\gamma_{\ell'_1\ell''_1,\ell'_2\ell''_2}(k'_1k''_1 \ , \ k'_2k''_2)\right|$$

$$= \sum_{\substack{k'_1\ell'_1=m',k''_1\ell''_1=m'' \\ k'_2\ell'_2=n',k''_2\ell''_2=n'' \\ q^1_{\ell'_1,\ell'_2}=\ell'_1 \ , \ q^1_{\ell''_1\ell''_2}=\ell''_1 \\ q^2_{\ell'_1,\ell'_2}=\ell'_2 \ , \ q^2_{\ell''_1,\ell''_2}=\ell''_2}} \left|\gamma_{\ell'_1,\ell'_2}(k'_1,k'_2)\right| \left|\gamma_{\ell''_1,\ell''_2}(k''_1,k''_2)\right|$$

$$= \left(\sum_{\substack{k'_1\ell'_1=m' \\ k'_2\ell'_2=n' \\ q^1_{\ell'_1,\ell'_2}=\ell'_1 \\ q^2_{\ell'_1,\ell'_2}=\ell'_2}} \left|\gamma_{\ell'_1,\ell'_2}(k'_1,k'_2)\right| \right) \left(\sum_{\substack{k''_1\ell''_1=m'' \\ k''_2\ell''_2=n'' \\ q^1_{\ell''_1,\ell''_2}=\ell''_1 \\ q^2_{\ell''_1\ \ell''_2}=\ell''_2}} \left|\gamma_{\ell''_1,\ell''_2}(k''_1,k''_2)\right| \right)$$

$$= \varphi(m',n') \; \varphi(m'',n'') \; .$$

On va maintenant déterminer les valeurs de $\varphi(p^r,p^s)$ pour p premier, r et $s \geqslant 0$, $r + s > 0$.

D'après la définition de la fonction φ , on a

$$\varphi(p^r,p^s) = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant r \\ 0\leqslant k\leqslant s \\ q^1_{p^j,p^k} = p^j \\ q^2_{p^j,p^k} = p^k}} |\gamma_{pj,pk}(p^{r-j} , p^{s-k})| \; .$$

Par ailleurs, comme $\gamma_{p^j,p^k} = g_{p^j,p^k} * (\lambda \otimes \lambda)$, on a

$$\gamma_{p^j,p^k}(p^{r-j}, p^{s-k}) = \sum_{\substack{0\leqslant j'\leqslant r-j \\ 0\leqslant k'\leqslant s-k}} (-1)^{j'+k'} \; g_{p^j,p^k}(p^{j'}, p^{k'}) \; .$$

Mais il résulte de la définition de la fonction g_{p^j,p^k} que

$$g_{p^j,p^k}(p^{j'},p^{k'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j' + k' \leqslant 1 \text{ et } (p^{j'+k'}, p^{j+k})=1 \; , \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Donc

$$|\gamma_{p^j,p^k}(p^{r-j}, p^{s-k})| = \Big| \sum_{\substack{0\leqslant j'\leqslant r-j \\ 0\leqslant k'\leqslant s-k \\ (p^{j+k},p^{j'+k'})=1}} (-1)^{j'+k'}\ \mu^2(p^{j'+k'})\Big| \ .$$

On arrive à

$$\varphi(p^r,p^s) = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant r \\ 0\leqslant k\leqslant s \\ q^1_{p^j,p^k}= p^j \\ q^2_{p^j,p^k}= p^k}} \Big| \sum_{\substack{0\leqslant j'\leqslant r-j \\ 0\leqslant k'\leqslant s-k \\ (p^{j+k},p^{j'+k'})=1}} (-1)^{j'+k'}\ \mu^2(p^{j'+k'})\Big|$$

Par ailleurs, la condition $q^1_{p^j,p^k} = p^j$ et $q^2_{p^j,p^k} = p^k$ est équivalente à $j + k \neq 1$, comme on le voit facilement en examinant les définitions des fonctions q^1 et q^2 d'une part et d'autre part

$$\mu^2(p^{j'+k'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j' + k' < 1 \ , \\ 0 & \text{si } j' + k' > 1 \ , \end{cases}$$

On peut donc écrire

$$\varphi(p^r,p^s) = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant r \\ 0\leqslant k\leqslant s \\ j+k\neq 1}} \Big| \sum_{\substack{0\leqslant j'\leqslant r-j \\ 0\leqslant k'\leqslant s-k \\ j'+k'<1}} (-1)^{j'+k'} \Big|$$

Ainsi,

$$\varphi(1,p) = |1 + (-1)| = 0 = \varphi(p,1) ,$$

et pour $r + s \geqslant 2$, on voit que j et k fixés, $j + k \neq 1$,

$$\Big| \sum_{\substack{0 \leqslant j' \leqslant r-j \\ 0 \leqslant k' \leqslant s-k \\ j'+k' \leqslant 1}} (-1)^{j'+k'} \Big| = 1 .$$

Donc, pour $r > 0$ et $s > 0$, on a

$$\varphi(p^r , p^s) = (r+1)(s+1) - 2 .$$

On a toujours pour r et $s \geqslant 0$ et $r + S > 0$

$$\varphi(p^r, p^s) = (r + 1)(s + 1) - 2 .$$

III.3. Lemme 1.

Pour $\mathrm{Re}\, z > \frac{1}{2}$, la série double $\sum_{m \text{ et } n \geqslant 1} \frac{\varphi(m,n)}{m^z n^z}$ converge absolument et sa somme est égale à celle du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \left(1 + \frac{(2p^z-1)^2}{(p^z-1)^4}\right)$$

-:-:-:-

Démonstration.

Posons pour $|u| < 1$ et $|v| < 1$ et pour chaque nombre premier p ,

$$S_p(u,v) = \sum_{\substack{r \geqslant 0 \\ s \geqslant 0}} \varphi(p^r, p^s)\, u^r\, v^s \quad .$$

On a :

$$S_p(u,v) = \sum_{\substack{r \geqslant 0 \\ s \geqslant 0}} [(r+1)(s+1) - 2]u^r v^s - (-1) + 1$$

$$= \frac{1}{(1-u)^2(1-v)^2} - \frac{2}{(1-u)(1-v)} + 2$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{(1-u)(1-v)} - 1\right]^2$$

Ainsi, pour $\operatorname{Re} z_1 > 0$ et $\operatorname{Re} z_2 > 0$,

$$S_p\left(\frac{1}{p^{z_1}}, \frac{1}{p^{z_2}}\right) = 1 + \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{pz_1}\right)\left(1 - \frac{1}{pz_2}\right)} - 1\right]^2$$

$$= 1 + \frac{(p^{z_1} + p^{z_2} - 1)^2}{(p^{z_1} - 1)^2 (p^{z_2} - 1)^2} \quad .$$

Donc, pour $\operatorname{Re} z > 0$,

$$S_p\left(\frac{1}{p^z}, \frac{1}{p^z}\right) = 1 + \left(\frac{2p^z - 1}{(p^z - 1)^2}\right)^2 ;$$

autrement dit,

$\sum_{\substack{r,s\geqslant 0 \\ r+s>0}} \frac{\varphi(p^r,p^s)}{p^{(r+s)z}}$ converge et sa somme est égale à $\frac{(2p^z-1)^2}{(p^z-1)^4}$.

Par ailleurs, on voit que pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, la série $\sum_p \frac{(2p^z-1)^2}{(p^z-1)^4}$ converge absolument.

Ainsi, pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, la série $\sum_{p,r,s,} \frac{\varphi(p^r,p^s)}{p^{(r+s)z}}$ converge absolument et sa somme est égale à celle de la série absolument convergente

$$\sum_p \frac{(2p^z-1)^2}{(p^z-1)^4} .$$

D'après le théorème cité au § I.4, on a, puisque φ est multiplicative,

pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, la série $\sum_{m>1} \frac{\varphi(m,n)}{m^z n^z}$

converge absolument et sa somme est égale à celle du produit infini

$\prod_p \left[1 + \frac{(2p^z-1)^2}{(p^z-1)^4}\right]$ absolument convergent pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$.

Conséquence : Comme pour tout couple $[m,n]\ |h(m,n)| < \varphi(m,n)$ et comme $\sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n\geqslant 1}} \frac{\varphi(m,n)}{mn} < +\infty$, on a : $\sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n\geqslant 1}} \frac{h(m,n)}{mn}$ converge absolument et,

$$\sum_{\substack{m<x \\ n<y}} \frac{h(m,n)}{mn} = \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n\geqslant 1}} \frac{h(m,n)}{mn} - \sum_{\substack{m>x \\ \text{ou} \\ n>y}} \frac{h(m,n)}{mn} .$$

D'où

$$\Big| \sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} f(m,n) - \frac{36}{\Pi^4}\Big(\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\geqslant 1}} \frac{h(m,n)}{mn}\Big)xy\Big| \leqslant \frac{36}{\Pi^4}\, xy \sum_{\substack{m>x\\ \text{ou}\\ n>y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn}$$

$$+ \frac{6}{\Pi^2}\, xy^{\frac12} \sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn^{\frac12}} \Big|R\Big(\frac{y}{n}\Big)\Big| + \frac{6}{\Pi^2}\, x^{\frac12}y \sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{m^{\frac12}n} \Big| R\Big(\frac{x}{m}\Big)\Big|$$

$$+ x^{\frac12}y^{\frac12} \sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{m^{\frac12}n^{\frac12}} \Big|R\Big(\frac{x}{m}\Big)\, R\Big(\frac{y}{n}\Big)\Big| \ .$$

III,4. On va maintenant montrer que chacun des termes au second membre de l'inégalité précédente est inférieur à $K(y\sqrt{x} + x\sqrt{y})$, ceci, pour tout $x \geqslant 1$ et tout $y \geqslant 1$; K désignant une constante absolue.

III,4.1. Lemme 2.

Quand y tend vers $+\infty$,

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{m} \sim C^{te}\, y^{\frac12} \ .$$

Démonstration.

Pour Re z > 0 ,

$$S_p\Big(\frac{1}{p}\ ,\ \frac{1}{p^z}\Big) = 1 + \frac{(p^z+p-1)^2}{(p^z-1)^2(p-1)} \ .$$

$$S_p\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p^z}\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{2z}}}\right)\left(1 + \frac{p^{4z} + 2p^{3z+1} + 2p^{z+2} - 2p^{3z} - 6p^{z+1} - p^{2z} + 4p^z - 2p^2 + 4p - 2}{p^{2z}(p^z-1)^2(p-1)^2}\right)$$

Remarquons que, pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{3}$, le produit infini $\prod_p (1 + u_p(z))$ où

$$u_p(z) = \frac{p^{4z} + 2p^{3z+1} + 2p^{z+2} - 2p^{3z} - 6p^{3+1} - p^{2z} + 4p^z - 2p^2 + 4p - 2}{p^{2z}(p^z - 1)^2 (p - 1)^2}$$

est absolument convergent et, quelque soit $G_o > \frac{1}{3}$, il y a convergence uniforme pour $\operatorname{Re} z \geqslant G_o$. Si on désigne par $\Phi(z)$ sa valeur, la fonction Φ est holomorphe pour $\operatorname{Re} g > \frac{1}{3}$.

D'après le théorème énoncé au §I.4, on peut écrire :

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n\geqslant 1}} \frac{\varphi(m,n)}{mn^z} = \zeta(2z)\,\check{\Phi}(z) .$$

La fonction définie par le second membre de l'égalité précédente est holomorphe en tous les points de la droite $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ autres que le point $\frac{1}{2}$, qui est un pôle simple de résidu $\frac{1}{2}\,\tilde{\Phi}(\frac{1}{2})$.

Ainsi, d'après le théorème de Ikéhara, quand y tend vers $+\infty$,

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{m} \sim \tilde{\Phi}(\tfrac{1}{2})\,y^{\frac{1}{2}} \quad \text{car} ,$$

pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n\geqslant 1}} \frac{\varphi(m,n)}{mn^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varphi(m,n)}{m} \right) \frac{1}{n^z} .$$

III.4.2. Lemme 3.

Soit $b \in \mathbb{R}$ et E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $\{x \in E / x \leqslant b\}$ possède un nombre fini d'éléments. Soit φ une application de E dans $\mathbb{C}$. Pour tout élément t de $\mathbb{R}$, tel que $t \leqslant b$, posons

$$\Phi(t) = \sum_{\substack{u \in E \\ u \leqslant t}} \varphi(u) \quad .$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, tel que $a < b$ et soit f une fonction réelle ou complexe à dérivée continue sur $[a,b]$. Alors on a :

$$\sum_{\substack{u \in E \\ a < u \leqslant b}} \varphi(u) f(u) = \Phi(b) f(b) - \Phi(a) f(a) - \int_a^b \Phi(t) f'(t) \, dt \, .$$

Démonstration.

Soit Y la fonction d'une variable réelle définie par

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < o \, ; \\ 1 & \text{si } x \geqslant o \end{cases}$$

Alors pour tout $u \in E \cap]a,b]$, on a :

$$\varphi(u)[f(b) - f(u)] = \int_u^b \varphi(u) f'(t) \, dt = \int_a^b \varphi(u) Y(t-u) f'(t) \, dt \, .$$

Donc :

$$f(b) \Big(\sum_{\substack{u \in E \\ a < u \leqslant b}} \varphi(u) \Big) - \sum_{\substack{u \in E \\ a < u \leqslant b}} \varphi(u) f(u) = \int_a^b f'(t) \Big(\sum_{u \in E} \varphi(u) \; Y(t-u) \Big) \, dt$$

c'est-à-dire :

$$f(b)(\Phi(b) - \Phi(a)) - \sum_{\substack{u\in E \\ a<u\leqslant b}} \varphi(u)\, f(u) = \int_a^b f'(t) \Big(\sum_{a<u\leqslant t} \varphi(u) \Big)\, dt$$

$$= \int_a^b f'(t)\, (\Phi(t) - \Phi(a))\, dt = \int_a^b f'(t)\, \Phi(t) dt - \Phi(a)\, (f(b) - f(a)) .$$

d'où le résultat.

III, 4. 3. Lemme 4.

Quel que soit $y \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n>y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn} \leqslant B_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

où B_1 est une constante absolue.

Démonstration.

D'après le lemme 2, on peut écrire :

$\forall y \geqslant 1$, $\sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{n} \leqslant C_1 y^{\frac{1}{2}}$ où C_1 est une constante absolue.

Dans le lemme 3, en prenant $a = y$, $b = Y$, $f(t) = \frac{1}{t}$, $E = \mathbb{N}^*$, et si on fait jouer à la fonction définie pour chaque n par $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varphi(m,n)}{m}$ le rôle de φ du lemme 3;

on a :

$\Phi(t) = \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n\leqslant t}} \frac{\varphi(m,n)}{m}$ et la conclusion du lemme 3 s'écrit :

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ y<n\leqslant Y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn} = \frac{1}{y} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\leqslant Y}} \frac{\varphi(m,n)}{m} - \frac{1}{y} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{m} + \int_y^Y \frac{1}{t^2} \Big(\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\leqslant t}} \frac{\varphi(m,n)}{m} \Big) dt$$

Un passage à la limite lorsque Y tend vers $+\infty$ donne :

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n>y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn} = -\frac{1}{y} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{m} + \int_y^\infty \frac{1}{t^2} \Big(\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\leqslant t}} \frac{\varphi(m,n)}{m} \Big) dt.$$

Donc :

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n>y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn} \leqslant C_1 \int_y^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} = 2\, C_1 y^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{d'où le résultat voulu.}$$

Remarquons que, φ étant symétrique en m et n, on peut écrire :

$$\forall x \geqslant 1 \quad , \quad \sum_{\substack{m>x\\ n\geqslant 1}} \frac{\varphi(m,n)}{mn} \leqslant B_1 x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{où } B_1 \text{ est}$$

la même constante absolue que plus haut.

III.4.4. Lemme 5.

Quels que soient $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn^{\frac{1}{2}}} \left| R\left(\frac{y}{n}\right) \right| \leqslant B_2 \quad .$$

où B_2 est une constante absolue.

Démonstration.

On a :

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn^{\frac{1}{2}}} \left| R\left(\frac{y}{n}\right) \right| \leqslant A \sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{mn^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\log \frac{y}{n}}\right) .$$

Pour chaque couple $[m,n]$ tel que $m \leqslant x$ et $n \leqslant y$,

$$\frac{\varphi(m,n)}{m}\left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\log\frac{y}{n}}\right) = \frac{\varphi(m,n)}{m} + \int_0^{\sqrt{\log\frac{y}{n}}} \frac{\varphi(m,n)}{m}\, e^{\frac{t^2}{2}-\alpha t}(t-\alpha)\,dt$$

$$= \frac{\varphi(m,n)}{m} + \int_0^{\sqrt{\operatorname{Log} y}} \frac{\varphi(m,n)}{m}\, Y\left(\sqrt{\log\frac{y}{n}} - t\right) e^{\frac{t^2}{2}-\alpha t}(t-\alpha)\,dt \quad (1)$$

où Y est la fonction définie au lemme 3 .

Posons $\hat{\Phi}(u,v) = \sum_{\substack{m\leqslant u\\ n\leqslant v}} \frac{\varphi(m,n)}{m}$.

D'après le lemme 2 $\hat{\Phi}(u,v) \leqslant \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\leqslant v}} \frac{\varphi(m,n)}{m} \leqslant c_1 v^{\frac{1}{2}}$. Par addition sur les couples $[m,n]$, la formule (1) ci-dessus conduit à :

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{m}\left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\operatorname{Log}\frac{y}{n}}\right)$$

$$\leqslant \hat{\Phi}(x,y) + \int_0^{\sqrt{\log y}} \hat{\Phi}(x, y\,e^{-t^2})\, e^{\frac{t^2}{2}-\alpha t}(t+\alpha)\,dt$$

$$\leqslant C_1 y^{\frac{1}{2}} + C_1 y^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{\log y}} e^{-\alpha t}(t+\alpha)dt \leqslant C_1 y^{\frac{1}{2}}\left(1 + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}(t+\alpha)dt\right) .$$

En posant $B_2 = \frac{6}{\Pi^2} A\, C_1\left(1 + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}(t+\alpha)dt\right)$, on a le résultat voulu.

De manière tout-à-fait analogue, on a le résultat suivant :

Quels que soient $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ n\leqslant y}} \frac{\varphi(m,n)}{m^{\frac{1}{2}}n}\left|R\left(\frac{x}{m}\right)\right| \leqslant B_2 .$$

B_2 étant la même constante que celle du lemme 5.

III, 4.5. Lemme 6.

Quand x et y tendent vers $+\infty$,

$$\sum_{mn \leqslant xy} \varphi(m,n) \sim c^{te}\, x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{2}}\, (\log xy)^3 \quad .$$

Démonstration.

D'après le lemme 1, pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ n \geqslant 1}} \frac{\varphi(m,n)}{m^z n^z} = \prod_p \left[1 + \frac{(2p^z-1)^2}{(p^z-1)^4}\right] \quad .$$

Comme

$$1 + \frac{(2p^z-1)^2}{(p^z-1)^4} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{2z}}}\right)^4 \left(1 + \frac{12}{p^{3z}} + \frac{15}{p^{4z}} - \frac{4}{p^{5z}} - \frac{10}{p^{6z}} + \frac{2}{p^{8z}}\right) ,$$

on peut écrire :

$$\sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ n \geqslant 1}} \frac{\varphi(m,n)}{m^z n^z} = (\zeta(2z))^4 \prod_p (1 + v_p(z))$$

où $\quad v_p(z) = \frac{12}{p^{3z}} + \frac{15}{p^{4z}} - \frac{4}{p^{5z}} - \frac{10}{p^{6z}} + \frac{2}{p^{8z}}$.

On voit immédiatement que le produit infini $\prod_p (1 + v_p(z))$ converge pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{3}$ et que, quelque soit $G_0 > \frac{1}{3}$, il y a convergence uniforme pour $\operatorname{Re} z \geqslant G_0$. Si on désigne par $F(z)$ sa valeur, la fonction F est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{3}$.

Ainsi, on a pour $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$.

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n\geqslant 1}} \frac{\varphi(m,n)}{m^z n^z} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{mn=k} \varphi(m,n) \Big) \times \frac{1}{k^z} = (z - \tfrac{1}{2})^{-4}\, G(z) \ ,$$

où G est une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}\ z > \frac{1}{2}$ (et même pour $\mathrm{Re}\ z > \frac{1}{3}$) et $G(\frac{1}{2}) \neq 0$.

Une généralisation d'un théorème de Ikehara que l'on trouvera dans [6] permet de conclure que lorsque le produit xy tend vers $+\infty$,

$$\sum_{mn<xy} \varphi(m,n) \sim \frac{1}{6}\, G(\tfrac{1}{2})\, x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} (\mathrm{Log}\ xy)^3 \qquad \text{d'où le lemme.}$$

Comme la fonction égale à $\mathrm{Log}(1 + xy)$ est continue positive sur $[1 + \infty[\times [1 + \infty [$ et équivalente à $\mathrm{Log}\ xy$ lorsque x et y tendent vers $+\infty$, on peut écrire :

$$\sum_{\substack{m<x\\ n<y}} \varphi(m,n) \leqslant C'\, x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{2}} (\mathrm{Log}(1 + xy))^3 \qquad \text{quels que soient } x \geqslant 1 \text{ et}$$

$y \geqslant 1$ et où C' est une constante absolue.

III.4.,6 Lemme 7.

Quels que soient $x \geqslant 1$ *et* $y \geqslant 1$, *on a* :

$$x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m<x\\ n<y}} \frac{\varphi(m,n)}{m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \left|R(\tfrac{x}{m})\right| \left|R(\tfrac{y}{n})\right| \leqslant B_3 (xy^{\frac{1}{2}} + yx^{\frac{1}{2}})$$

où B_3 *est une constante absolue*.

Démonstration.

Pour chaque couple $[m,n]$ tel que $m \leqslant x$ et $n \leqslant y$,

$$\varphi(m,n)\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left|R\left(\frac{x}{m}\right)\right| \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left|R\left(\frac{y}{n}\right)\right| \leqslant A^2\varphi(m,n)\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\alpha\sqrt{\log\frac{x}{m}} - \alpha\sqrt{\log\frac{y}{m}}\right) .$$

Pour les mêmes couples $[m,n]$,

$$\varphi(m,n)\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\log\frac{x}{m}} - \alpha\sqrt{\log\frac{y}{n}}\right)$$

$$= \varphi(m,n)\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\log\frac{x}{m}}\right) + \int_0^{\sqrt{\log\frac{y}{n}}} \varphi(m,n)\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\log\frac{x}{m}}\right) e^{\frac{t^2}{2}-\alpha t}(t-\alpha)\,dt$$

$$= \varphi(m,n) + \int_0^{\sqrt{\log\frac{x}{m}}} \varphi(m,n) e^{\frac{t^2}{2}-\alpha t}(t-\alpha)\,dt$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\log\frac{y}{n}}} \left[\varphi(m,n) + \int_0^{\sqrt{\log\frac{x}{m}}} \varphi(m,n)\, e^{\frac{u^2}{2}-\alpha u}(u-\alpha)\,du\right] e^{\frac{t^2}{2}-\alpha t}(t-\alpha)\,dt$$

$$= \varphi(m,n) + \int_0^{\sqrt{\log x}} \varphi(m,n)\, Y\left(\sqrt{\log\frac{x}{m}} - t\right) e^{\frac{t^2}{2}-\alpha t}(t-\alpha)\,dt$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\log y}} \left[\varphi(m,n) + \int_0^{\sqrt{\log x}} \varphi(m,n)\, Y\left(\sqrt{\log\frac{x}{m}} - u\right) e^{\frac{u^2}{2}-\alpha u}(u-\alpha)\,du\right] Y\left(\sqrt{\log\frac{y}{n}} - t\right) \times$$

$$\times\, e^{\frac{t^2}{2}-\alpha t}(t-\alpha)\,dt.$$

Il vient par addition sur les couples $[m,n]$ et en posant

$$\Phi(x,y) = \sum_{\substack{m\leqslant x \\ n\leqslant y}} \varphi(m,n) :$$

$$\sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} \varphi(m,n)\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\log\frac{x}{m}} - \alpha\sqrt{\log\frac{y}{n}}\right)$$

$$\leq \Phi(x,y) + \int_0^{\sqrt{\log x}} \Phi(xe^{-t^2},y)\, e^{\frac{t^2}{2} - \alpha t}(t+\alpha)\, dt$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\log y}} \left[\Phi(x,y\, e^{-t^2}) + \int_0^{\sqrt{\log x}} \Phi(xe^{-u^2},ye^{-t^2})e^{\frac{u^2}{2} - \alpha u}(u+\alpha)du\right] e^{\frac{t^2}{2} - \alpha t}(t+\alpha)\, dt$$

$$\leq c'\, x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{2}}\, (\mathrm{Log}(1+xy))^3 + c'x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(\mathrm{Log}(1+xy))^3 \int_0^{\sqrt{\log x}} e^{-\alpha t}(t+\alpha)\, dt$$

$$+ c'\, x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(\log(1+xy))^3 \int_0^{\sqrt{\log x}} e^{-\alpha u}(u+\alpha)du\Big]e^{-\alpha t}(t+\alpha)\, dt$$

$$\leq c'x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(\log(1+xy))^3\Big[1 + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}(t+\alpha)dt + \int_0^{\infty}\Big(1 + \int_0^{\infty} e^{-\alpha u}(u+\alpha)du\Big)e^{-\alpha t}(t+\alpha)dt\Big]$$

$$\leq c''\, x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{2}}(\log(1+xy)^3$$

avec $c'' = c'\Big[1 + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}(t+\alpha)dt + \int_0^{\infty}\Big(1 + \int_0^{\infty} e^{-\alpha u}(u+\alpha)du\Big)e^{-\alpha t}(t+\alpha)dt\Big]$

Pour x et $y \geq 1$,

$$(\log(1+xy))^3 < c^{te}(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) .$$

En effet,

si $y \leq x$ $(\log(1+xy))^3 \leq (\log(1+x^2))^3 \leq c^{te}\, x^{\frac{1}{2}}$;

si $x \leqslant y \quad (\log(1 + xy))^3 \leqslant (\log(1 + y^2))^3 \leqslant c^{te}\, y^{\frac{1}{2}}$.

Par suite,

$$c''\, x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{2}}(\log(1 + xy))^3 < c_2(x^{\frac{1}{2}}y + y^{\frac{1}{2}}x) \quad \text{où}$$

c_2 est une constante absolue.

En prenant $B_3 = A^2 c_2$, on arrive au résultat voulu et ceci achève la démonstration du lemme 7 ainsi que du théorème 3.

-:::-:::-

Notes et Références.

[1] Faĭnleib : "Un théorème de densité locale avec reste pour une classe de fonctions arithmétiques". Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarical 21, 1970.

[2] et [3]

Nous avons indiqué dans les préliminaires l'essentiel de ce dont nous avons eu besoin au cours de ce travail. Pour des résultats plus poussés et leurs démonstrations, on peut consulter les articles de H. DELANGE intitulés :

"On some sets of paris of positive integers" (Journal of Number theory vol.1 n°3 (July 1969) et

"Sur les fonctions de plusieurs entiers strictement positifs" (L'enseignement Mathématique vol.15, 1969 pp 77-88).

[4] Les définitions sont celles données dans

" Sur les fonctions additives de plusieurs entiers". H. DELANGE : (C.R. Acad. Sc. Paris t.277 (15 octobre 1973).

[5] La méthode est inspirée de l'article de H. DELANGE "Sur certaines fonctions additives à valeurs entières". (Acta Arithmetica XVI 1969).

[6] H. DELANGE "Généralisation du théorème de Ikahara". (An. Sc. de l'Ecole Norm. Supérieure (3) LXXI Fasc.3).